

Structure connective des relations multiples

Stéphane DUGOWSON *

25 mai 2015

Résumé. L'objet de cet article est d'abord de définir la structure connective sur un ensemble I de toute relation multiple portant sur une famille d'ensembles indexée par I , une telle relation étant vue comme exprimant une compatibilité entre les états de différents systèmes, de sorte qu'une compatibilité totale exprime en fait une absence d'interaction. Nous démontrons alors un « théorème de Brunn » pour les relations multiples, à savoir le fait que toute structure connective est celle d'une telle relation.

Mots clés. Connectivité. Espaces connectifs. Relations. Algèbre relationnelle. Borroméen. Brunn.

Abstract. The prime purpose of this paper is to define the connectivity structure, on a set I , of any multiple relation defined on a family of sets indexed by I , such a relation expressing compatibility between the states of different systems (thus a full compatibility indicates absence of any connection). We then demonstrate a "Brunn's theorem" for those multiple relations, that is the fact that every connectivity structure is the connectivity structure of such a relation.

Keywords. Connectivity. Connectivity spaces. Relations. Relational algebra. Borromean. Brunn.

MSC2010. 08A02, 54A05.

Les relations multiples considérées ici sont d'arité quelconque variable, généralement infinie, puisque les ensembles entre les éléments desquels elles portent sont indexés par un sous-ensemble d'un ensemble I quelconque¹ fixé. Intuitivement, les ensembles ainsi indexés représentent autant de systèmes en interaction mutuelle, leurs éléments représentent les états de ces systèmes, et une relation multiple exprime la compatibilité de certains de ces états, donc certaines contraintes mutuelles entre les systèmes considérés. Afin de définir la structure connective sur I d'une telle relation, nous commençons par préciser dans la première partie, consacrée à un certain monoïde commutatif et idempotent constitué de ces relations multiples, certaines notations, définitions et résultats relatifs à de telles relations. Cette partie n'a aucune prétention à l'originalité, on en trouve sans doute la substance dans les cours d'*algèbre relationnelle* —

*Laboratoire LISMMA-QUARTZ, Institut Supérieur de Mécanique de Paris. Email : stephane.dugowson@supmeca.fr

1. Malgré cela, on ne fera pas a priori l'hypothèse de l'axiome du choix. Du reste, pour tous les exemples auxquels nous avons songé en pratique, les ensembles de la famille considérée ont des éléments repérables qui peuvent être choisis directement, de sorte que le produit de ces ensembles est assurément non vide.

même si l'on s'y limite généralement aux arités finies — et pour la plupart les résultats donnés sont intuitivement évidents et presque toujours très faciles à démontrer. La deuxième partie, plus originale, où le résultat le plus intéressant est sans doute que l'union de parties dites détachables n'est pas nécessairement elle-même détachable, prépare à la troisième, où se trouve définie la structure connective d'une relation multiple. On démontre finalement un « théorème de Brunn » pour les relations multiples, à savoir le fait que toute structure connective est celle d'une relation multiple.

Dans tout l'article, I désigne un ensemble, et $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non vides indexée par I . On notera $|\mathcal{E}|$ l'ensemble $\cup_{i \in I} E_i$. Pour tout ensemble A , on désigne par $\mathcal{P}A$ l'ensemble des parties de A .

1 Le monoïde commutatif $(\mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \mathfrak{A}, 1)$

1.1 Graphes triviaux et familles

Définition 1. Pour toute partie J de I , on appelle *graphe total* ou *graphe trivial* sur J et on note Z_J le produit cartésien

$$Z_J = \prod_{j \in J} E_j.$$

Les éléments de Z_J seront appelés des *J-familles*. Cette dénomination est sans ambiguïté car les Z_J sont deux à deux disjoints. L'ensemble de toutes les familles dans \mathcal{E} sera noté \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{J \in \mathcal{P}(I)} Z_J.$$

Pour $x \in \mathcal{Z}$, nous noterons J_x le *domaine* de x , c'est-à-dire l'unique partie J_x de I telle que $x \in Z_{J_x}$.

Remarque 1. Toute J -famille $x \in Z_J$ s'identifie à une application $x : J \rightarrow |\mathcal{E}|$ vérifiant la condition suivante :

$$\forall j \in J, x_j \in E_j,$$

où $x_j = x(j)$ désigne l'image de j par cette application.

Remarque 2 (Cas où $J = \emptyset$). Le graphe total sur $\emptyset \subset I$ est réduit à un singleton, dont par convention l'unique élément sera noté \bullet :

$$Z_{\emptyset} = \{\bullet\}.$$

Il y a donc une unique \emptyset -famille, à savoir \bullet .

1.2 Relations multiples

Définition 2. Une *relation multiple* R dans \mathcal{E} est un couple (J, G) constitué

- d'une partie $J \subset I$ appelée *domaine* de R ,
- d'une partie $G \subset Z_J$ appelée le *graphe* de R .

Dans la suite, les relations multiples dans \mathcal{E} seront également appelées plus simplement des \mathcal{E} -relations, ou plus simplement encore des *relations*.

Une relation R étant donnée, nous désignerons parfois par J_R son domaine, et par G_R son graphe. Les relations de domaine J pourront être appelées des J -relations. Dans le cas où $\text{card}(J) = 2$, on parlera de relations binaires.

Les J_R -familles appartenant à G_R seront dites *compatibles pour la relation* R , ou encore *R -compatibles*. Par abus d'écriture, on écrira souvent $x \in R$ au lieu de $x \in G_R$ pour exprimer qu'une famille $x \in Z_{J_R}$ est R -compatible.

L'ensemble des relations multiples dans \mathcal{E} sera noté $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ou plus simplement, puisqu'ici nous considérons que \mathcal{E} est fixé, \mathcal{R} . L'ensemble des relations multiples de domaine $J \subset I$ sera noté \mathcal{R}_J , de sorte que

$$\mathcal{R} = \bigcup_{J \subset I} \mathcal{R}_J.$$

Pour tout $J \subset I$, les J -relations sont ordonnées par l'inclusion de leurs graphes. Étant données deux J -relations R et S , nous écrirons $R \subset_J S$, ou simplement $R \subset S$, pour exprimer le fait que $G_R \subset G_S$.

1.2.1 Relations nulles et relations triviales

La J -relation minimale, notée 0_J , est celle de graphe vide :

$$0_J = (J, \emptyset),$$

tandis que la J -relation maximale, notée 1_J , est celle de graphe total

$$1_J = (J, Z_J).$$

Les relations de la forme 0_J seront dites *nulles*, celles de la forme 1_J seront dites *triviales* (ou *totales*).

Si l'ensemble J est fini, ou si l'on admet l'axiome du choix, alors $Z_J \neq \emptyset$, de sorte que $0_J \neq 1_J$. Ceci est vrai, bien que ce ne soit pas très intuitif, en particulier pour $J = \emptyset$, auquel cas le graphe de 0_{\emptyset} est vide tandis que celui de 1_{\emptyset} est $Z_{\emptyset} = \{\bullet\}$.

Dans la suite, on notera également $\mathbf{1}$ cette dernière relation « sur aucun ensemble » :

$$\mathbf{1} = 1_{\emptyset} = (\emptyset, \{\bullet\}).$$

On posera également

$$\bar{\mathbf{1}} = 1_I,$$

et

$$\mathbf{0} = 0_I.$$

1.3 Restrictions

Dans cette section, on considère deux parties J et K de I telles que $J \subset K \subset I$.

1.3.1 Restrictions de familles

Définition 3. On appelle *restriction (de K) à J* , l'application $\rho_{(K,J)} : Z_K \rightarrow Z_J$ définie pour tout $x \in Z_K$ par

$$\rho_{(K,J)}(x) = x \circ (J \hookrightarrow K),$$

où x est vu comme application $x : K \rightarrow |\mathcal{E}|$ et où $(J \hookrightarrow K)$ désigne l'injection canonique de J dans K . Autrement dit,

$$\rho_{(K,J)}((x_k)_{k \in K}) = (x_k)_{k \in J}.$$

L'image $(x_k)_{k \in J}$ d'un élément $(x_k)_{k \in K}$ de Z_K par $\rho_{(K,J)}$ est la *restriction à J* de $(x_k)_{k \in K}$. Bien entendu, pour $K = J$, on a

$$\rho_{(J,J)} = id_{Z_J}.$$

Exemple 1. La restriction à $J = \emptyset$ d'une K -famille quelconque x est \bullet .

Définition 4. Soit J , K et L trois parties de I telles que

$$L \subset J \cap K.$$

Soit $x \in Z_J$ et $y \in Z_K$. On dit que x et y coïncident sur L si

$$\rho_{(J,L)}(x) = \rho_{(K,L)}(y).$$

1.3.2 Restriction des relations

Supposant toujours $J \subset K \subset I$, la notion de restriction, définie sur les familles $(x_k)_{k \in K}$, s'étend évidemment aux relations elles-mêmes :

Définition 5. L'application $\mathcal{R}_K \rightarrow \mathcal{R}_J$ qui à toute relation multiple $R = (K, G)$ avec $G \subset Z_K$ associe la relation (J, H) avec

$$H = \rho_{(K,J)}(G) = \{\rho_{(K,J)}(x), x \in G\} \subset Z_J$$

sera encore notée $\rho_{(K,J)}$ et encore appelée *restriction (de K) à J* . On a ainsi

$$\rho_{(K,J)}(K, G) = (J, \rho_{(K,J)}(G)) \in \mathcal{R}_J.$$

Exemple 2. Dans le cas où $J = \emptyset$, la restriction à J de la K -relation vide 0_K est 0_{\emptyset} , tandis que la restriction à J d'une relation non vide quelconque est $\mathbf{1} = 1_{\emptyset}$.

1.3.3 Composition des restrictions

Qu'elles portent sur les familles ou sur les relations, les restrictions se composent évidemment selon

$$\rho_{(K,L)} \circ \rho_{(J,K)} = \rho_{(J,L)},$$

où l'on a supposé $I \supset J \supset K \supset L$.

1.3.4 Notation

Plutôt que de noter $(\rho_{(K,L)} \circ \rho_{(J,K)})(x)$ la restriction successive d'une J -famille x à K puis à L , il serait plus commode de l'écrire

$$x\rho_{(J,K)}\rho_{(K,L)}.$$

Nous n'adopterons pas ici cette remise à l'endroit des notations de composition, mais les notations usuelles pour la restriction, qui n'explicitent pas le domaine de départ mais uniquement le domaine d'arrivée de la restriction, seront très utiles, et nous poserons ainsi pour toute J -famille x et toute partie $K \subset J$:

$$\rho_{(J,K)}(x) = x|_K.$$

De même pour les restrictions de relations :

$$\rho_{(J,K)}(R) = R|_K.$$

Avec ces notations, la composition des restrictions s'écrit simplement

$$x|_{K|L} = x_L.$$

1.4 Sommes de familles

1.4.1 Familles compatibles entre elles

Définition 6. Pour tout couple de familles $(x, y) \in \mathcal{Z}^2$, on dit que x et y sont *compatibles entre elles*, et on note $x \diamond y$, si x et y coïncident sur l'intersection de leurs domaines, autrement dit si

$$x|_{J_x \cap J_y} = y|_{J_x \cap J_y}.$$

La relation \diamond est évidemment réflexive et symétrique sur \mathcal{Z} .

1.4.2 Somme de deux familles compatibles

Définition 7. On définit ainsi une opération binaire partielle sur \mathcal{Z} : pour tout couple de familles $(x, y) \in \mathcal{Z}^2$ tel que $x \diamond y$, on note $x + y$ la famille de domaine

$$J_{x+y} = J_x \cup J_y,$$

et telle que

$$\forall j \in J_x, (x+y)_j = x_j \quad \text{et} \quad \forall j \in J_y, (x+y)_j = y_j.$$

Autrement dit, $x + y$ est caractérisée par son domaine $J_x \cup J_y$ et par le fait que

$$(x+y)|_{J_x} = x \quad \text{et} \quad (x+y)|_{J_y} = y.$$

On vérifie immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1 (Elément neutre, idempotence et commutativité). *L'opération + vérifie les trois propriétés suivantes :*

- pour tout $x \in \mathcal{Z}$, $x + \bullet = x$,
- pour tout $x \in \mathcal{Z}$, $x + x = x$,
- si x et y sont deux familles compatibles, alors $x + y = y + x$.

1.4.3 Somme de restrictions

Proposition 2. *Pour tout $x \in \mathcal{Z}$ et tout couple (K, L) de parties de J_x on a*

$$x|_K + x|_L = x|_{K \cup L}.$$

En particulier, si $K \cup L = J_x$, on a $x = x|_K + x|_L$.

Preuve. On a $x_K \diamond x_L$ puisque $x|_K|_{K \cap L} = x|_{K \cap L} = x|_L|_{K \cap L}$. Et $x|_K + x|_L$ coïncide trivialement avec x sur $K \cup L$, d'où l'égalité annoncée. \square

1.4.4 Restriction de somme

Proposition 3. *Soient x et y deux familles compatibles dans \mathcal{E} , et soit $L \subset J_x \cup J_y$. On a*

$$(x + y)|_L = x|_{J_x \cap L} + y|_{J_y \cap L}.$$

Preuve. On applique la proposition précédente au recouvrement de L par $J_x \cap L$ et $J_y \cap L$, d'où

$$(x + y)|_L = ((x + y)|_L)|_{J_x \cap L} + ((x + y)|_L)|_{J_y \cap L}.$$

Mais $((x + y)|_L)|_{J_x \cap L} = (x + y)|_{J_x \cap L} = ((x + y)|_{J_x})|_{J_x \cap L} = x|_{J_x \cap L}$. De même, $((x + y)|_L)|_{J_y \cap L} = y|_{J_y \cap L}$. D'où le résultat. \square

1.4.5 Familles finies de familles

Proposition 4. *Soient x, y et z trois familles dans \mathcal{E} . Si ces familles sont deux à deux compatibles : $x \diamond y$, $y \diamond z$, et $z \diamond x$, alors $(x + y) \diamond z$.*

Preuve. En effet, $(x + y)|_{(J_x \cup J_y) \cap J_z} = x|_{J_x \cap J_z} + y|_{J_y \cap J_z} = z|_{J_x \cap J_z} + z|_{J_y \cap J_z} = z|_{(J_x \cup J_y) \cap J_z}$. \square

Proposition 5 (Associativité). *L'opération binaire partielle $+$ est associative sur \mathcal{Z} au sens où pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathcal{Z}^3$,*

$$x \diamond y \diamond z \diamond x \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z).$$

Preuve. L'existence des sommes considérées est assurée par la proposition précédente, et leur égalité se vérifie immédiatement. \square

Du fait de l'associativité et de la commutativité de l'opération $+$, nous pourrions parler de la somme $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ d'une famille finie² quelconque $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de familles deux à deux compatibles dans \mathcal{E} . En particulier, la proposition 2 se généralise facilement :

2. Et la notion s'étend sans difficulté à une famille quelconque de familles deux à deux compatibles.

Proposition 6. *Pour tout $x \in \mathcal{Z}$ et tout recouvrement fini $(J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de J_x , on a*

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x|_{J_\lambda}.$$

1.5 Produit de relations

Pour désigner le produit des relations considéré ici, nous reprenons la notation \bowtie , usuelle en algèbre relationnelle pour désigner la *jointure* de deux relations.

1.5.1 Définition du monoïde commutatif $(\mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \bowtie, 1)$

Définition 8 (Produit de deux relations multiples). Étant données $R = (J_R, G_R)$ et $S = (J_S, G_S)$ deux relations multiples dans \mathcal{E} , on définit leur produit $T = R \bowtie S$ de la façon suivante :

- le domaine J_T de T est l'union $J_T = J_R \cup J_S$,
- le graphe $G_T \subset Z_{J_T}$ de T est défini par

$$G_T = \{x \in Z_{J_T}, \rho_{(J_T, J_R)}(x) \in G_R \text{ et } \rho_{(J_T, J_S)}(x) \in G_S\}.$$

Autrement dit,

$$(J_R, G_R) \bowtie (J_S, G_S) = (J_R \cup J_S, \rho_{(J_T, J_R)}^{-1}(G_R) \cap \rho_{(J_T, J_S)}^{-1}(G_S)).$$

Proposition 7. *Le graphe du produit $R \bowtie S$ de deux relations R et S dans \mathcal{E} est donné par*

$$G_{R \bowtie S} = \{r + s, r \in R, s \in S, r \diamond s\}.$$

Preuve. Pour r et s comme ci-dessus, on a $\rho_{(J_R \cup J_S, J_R)}(r + s) = (r + s)|_{J_R} = r \in G_R$, et de même $\rho_{(J_R \cup J_S, J_S)}(r + s) = (r + s)|_{J_S} = s \in G_S$. Réciproquement, pour toute $(J_R \cup J_S)$ -famille x telle que $r = \rho_{(J_T, J_R)}(x) \in G_R$ et $s = \rho_{(J_T, J_S)}(x) \in G_S$, on a clairement $r \diamond s$ et $x = r + s$.

□

Proposition 8. *L'opération \bowtie ainsi définie sur l'ensemble \mathcal{R} des relations multiples dans \mathcal{E} est associative, commutative, idempotente et admet pour élément neutre la « relation pleine sur aucun ensemble » $\mathbf{1} = 1_\emptyset$.*

Preuve. L'associativité et la commutativité de \bowtie découle de celles de l'union, de l'intersection et de la composition des opérations de restriction. Pour toute relation R , l'égalité

$$R \bowtie R = R$$

est immédiate. Enfin, on a

$$(J, G) \bowtie \mathbf{1} = (J, G) \bowtie (\emptyset, \{\bullet\}) = (J \cup \emptyset, \rho_{(J, J)}^{-1}(G) \cap \rho_{(J, \emptyset)}^{-1}(\{\bullet\})) = (J, G \cap Z_J) = (J, G).$$

□

De la définition du produit $R \bowtie S$, on déduit immédiatement que la restriction au domaine de R d'une famille $R \bowtie S$ -compatible est nécessairement R -compatible :

Proposition 9. *Pour toutes relations R et S dans \mathcal{E} , on a*

$$(R \bowtie S)|_{J_R} \subset R.$$

1.5.2 Exemples

Produit par $\bar{1} = 1_I$: prolongement à I .

Définition 9. Pour tout $J \subset I$ et tout $R \in \mathcal{R}_J$, on appelle *prolongement à I* et l'on note \bar{R} la I -relation définie par

$$\bar{R} = R \bowtie \bar{1}.$$

Remarque 3. La notation \bar{R} est compatible avec celles de $\mathbf{1}$ et de $\bar{1}$, puisque

$$\bar{1} = \mathbf{1} \bowtie \bar{1}.$$

Proposition 10. Pour tout $J \subset I$ et tout $R \in \mathcal{R}_J$, on a

$$\bar{R} = (I, \rho_{(I,J)}^{-1}(G_R)) = R \bowtie 1_{\neg J},$$

où $\neg J = I \setminus J$.

Preuve. Le domaine de \bar{R} est $I = J \cup I = J \cup \neg J$, et son graphe est

$$G_{\bar{R}} = \rho_{(I,J)}^{-1}(G_R) \cap \rho_{(I,I)}^{-1}(Z_I) = \rho_{(I,J)}^{-1}(G_R).$$

D'un autre coté, $\rho_{(I,\neg J)}^{-1}(Z_{\neg J}) = Z_I$, de sorte que $\rho_{(I,J)}^{-1}(G_R) = \rho_{(I,J)}^{-1}(G_R) \cap \rho_{(I,\neg J)}^{-1}(Z_{\neg J})$ d'où finalement

$$G_{\bar{R}} = G_{R \bowtie 1_{\neg J}}.$$

□

Produit par $\mathbf{0} = 0_I$. Pour toute relation $R \in \mathcal{R}$, il est immédiat que

$$R \bowtie \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Produit par 0_{\emptyset} . Pour toute relation $R \in \mathcal{R}$, il est immédiat que $R \bowtie 0_{\emptyset}$ est la relation vide de même domaine que R :

$$R \bowtie 0_{\emptyset} = (J_R, \emptyset) = 0_{J_R}.$$

Composition de deux relations binaires. Supposons que I contienne une partie J ayant trois éléments distincts notés 1, 2 et 3,

$$J = \{1, 2, 3\} \subset I,$$

et soient $f : E_1 \rightarrow E_2$ et $g : E_2 \rightarrow E_3$ deux relations binaires (par exemple deux applications), de domaines respectifs $J_f = \{1, 2\}$ et $J_g = \{2, 3\}$. Leur produit est alors défini par

$$f \bowtie g = g \bowtie f = (\{1, 2, 3\}, \{(x, y, z) \in E_1 \bowtie E_2 \bowtie E_3, y = f(x) \text{ et } z = g(y)\}),$$

de sorte que

$$g \circ f = \rho_{(\{1,2,3\}, \{1,3\})}(f \bowtie g).$$

Remarque 4. La non-commutativité de la composition des applications (ou des relations binaires) n'est bien entendu pas contredite par la commutativité du produit des relations, pour lequel l'information des E_i en jeu est contenue dans la donnée du domaine.

1.6 Relations incompatibles

Définition 10. Deux relations dans \mathcal{E} sont dites incompatibles si leur produit est nul.

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 11. Deux relations R et S sont incompatibles si et seulement si pour tout $x \in R$ et tout $y \in S$, on a x et y incompatibles.

Exemple 3. Toute relation nulle est incompatible avec toute autre relation.

1.7 Restriction d'un produit

Proposition 12. Soient R et S deux relations dans \mathcal{E} , et L une partie de $J_R \cup J_S$. On a

$$(R \bowtie S)|_L \subset R|_{L \cap J_R} \bowtie S|_{L \cap J_S}.$$

Preuve. Les deux relations sont comparables, puisqu'elles sont de même domaine L . Soit maintenant $x = (r + s)|_L \in (R \bowtie S)|_L$, avec $r \in R$, $s \in S$ et $r \diamond s$. On a

$$x = x|_{L \cap J_R} + x|_{L \cap J_S}.$$

Mais

$$x|_{L \cap J_R} = ((r + s)|_L)|_{L \cap J_R} = (r + s)|_{L \cap J_R} = ((r + s)|_{J_R})|_{L \cap J_R} = r|_{L \cap J_R},$$

d'où $x|_{L \cap J_R} \in R|_{L \cap J_R}$. De même, $x|_{L \cap J_S} \in S|_{L \cap J_S}$. On en déduit que $x \in R|_{L \cap J_R} \bowtie S|_{L \cap J_S}$.

□

Remarque 5. La réciproque est fausse en général. Par exemple, pour $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $E_i = \mathbf{N}$ pour tout $i \in I$, $J_R = \{1, 2, 3\}$, $J_S = \{1, 2, 4\}$, $L = \{1, 3, 4\}$, R défini par

$$(r_1, r_2, r_3) \in R \Leftrightarrow r_2 = 0$$

et S défini par

$$(s_1, s_2, s_4) \in S \Leftrightarrow s_2 \neq 0,$$

on a R et S incompatibles de sorte que

$$(R \bowtie S)|_L = 0_L,$$

mais par ailleurs

$$R|_{L \cap J_R} \bowtie S|_{L \cap J_S} = 1_{L \cap J_R} \bowtie 1_{L \cap J_S} = 1_L.$$

Proposition 13. Soient R et S deux relations dans \mathcal{E} , et L une partie de I vérifiant

$$J_R \cap J_S \subset L \subset J_R \cup J_S.$$

Alors

$$(R \bowtie S)|_L = R|_{L \cap J_R} \bowtie S|_{L \cap J_S}.$$

En particulier, si $J_R \cap J_S = \emptyset$, l'égalité ci-dessus est satisfaite pour tout $L \subset J_R \cup J_S$.

Preuve. D'après la proposition 12, il suffit de prouver l'inclusion du second membre dans le premier. Soit donc $r' + s' \in R|_{J_R \cap L} \bowtie S|_{J_S \cap L}$, avec $r' \in R|_{J_R \cap L}$ et $s' \in S|_{J_S \cap L}$ qui coïncident sur $J_R \cap J_S$. Puisque $r' \in R|_{J_R \cap L}$, il existe $r \in R$ tel que $r|_{J_R \cap L} = r'$, et de même il existe $s \in S$ tel que $s|_{J_S \cap L} = s'$. L'inclusion $J_R \cap J_S \subset L$ entraîne alors d'une part $J_R \cap J_S \subset J_R \cap L$ d'où $r|_{J_R \cap J_S} = (r|_{J_R \cap L})|_{J_R \cap J_S} = r'|_{J_R \cap J_S}$, et d'autre part $J_R \cap J_S \subset J_S \cap L$ d'où $s|_{J_R \cap J_S} = s'|_{J_R \cap J_S}$. Comme $r'|_{J_R \cap J_S} = s'|_{J_R \cap J_S}$, on en déduit que r et s coïncident sur $J_R \cap J_S$, d'où l'existence de $r + s \in R \bowtie S$, qui vérifie $(r + s)|_L = r' + s'$, d'où finalement $r' + s' \in (R \bowtie S)|_L$.

□

1.8 Produit de restrictions

Proposition 14. *Pour toute relation multiple $R \in \mathcal{R}$, et pour tout recouvrement $J_R = K \cup L$ du domaine de R par un couple (L, K) de parties de I , on a l'inclusion*

$$R \subset R|_L \bowtie R|_K.$$

Preuve. D'après les propositions 2 et 7, on a pour tout $x \in R : x = x|_L + x|_K \in R|_L \bowtie R|_K$.

□

2 Scissions

2.1 Parties propres et bipartitions

Rappelons qu'une partie propre d'un ensemble J est une partie $K \subset J$ telle que

$$\emptyset \subsetneq K \subsetneq J.$$

Dans cette section et la suivante, nous ferons souvent appel à des partitions de l'ensemble I , ou d'un sous-ensembles J de I , constituées de deux parties K et L . Nous appellerons de telles partitions des *bipartitions*. Rappelons qu'une partition est un recouvrement constitué de parties propres (donc non *non vides*) et deux à deux disjointes. Ainsi, une bipartition de J est un couple (K, L) de parties de J telles que

$$K \neq \emptyset \neq L \quad \text{et} \quad K \cup L = J \quad \text{et} \quad K \cap L = \emptyset.$$

Remarquons que l'existence d'une bipartition de J implique que J a au moins deux éléments.

2.2 Somme de deux familles de domaines disjoints

Soient J et K deux parties disjointes de $I : J \cap K = \emptyset$. Pour tout couple $(x, y) \in Z_J \times Z_K$, on a $x|_{J \cap K} = \bullet = y|_{J \cap K}$, donc $x \diamond y$, de sorte que $x + y \in Z_{J \cup K}$ est bien défini.

2.3 Unicité des factorisations disjointes

Proposition 15. *Soient $R \neq 0_{J_R}$ et $S \neq 0_{J_S}$ deux relations non nulles et de domaines disjoints : $J_R \cap J_S = \emptyset$. Alors*

$$R = (R \bowtie S)_{|J_R} \quad \text{et} \quad S = (R \bowtie S)_{|J_S}.$$

Preuve. D'après la proposition 13, on a

$$(R \bowtie S)_{|J_R} = R \bowtie S_{|\emptyset},$$

mais $S \neq 0_{J_S} \Rightarrow S_{|\emptyset} = 1_{\emptyset} = \mathbf{1}$, d'où $(R \bowtie S)_{|J_R} = R$. Et de même a-t-on $(R \bowtie S)_{|J_S} = S$.

□

Corollaire 16. *Deux relations non nulles de domaines disjoints sont nécessairement compatibles.*

Remarque 6. La proposition 15 cesse d'être vérifiée si l'on ne suppose pas $J \cap K = \emptyset$ ou si R ou S est nulle. Par exemple, $R \bowtie \mathbf{0} = \mathbf{0}$ et $R \bowtie 0_{\emptyset} = 0_J$ ne déterminent pas R . De même, on construit facilement un exemple de relations non nulles incompatibles de domaines respectifs J et K avec $J \cap K \neq \emptyset$, pour lesquelles la proposition n'est évidemment pas vérifiée.

Corollaire 17. *Soit T une relation non nulle, et soit (K, L) une bipartition de J_T . Alors, si elle existe, une factorisation de T de la forme*

$$T = R \bowtie S$$

avec $J_R = K$ et $J_S = L$ est nécessairement unique, R et S étant donnés par

$$R = T_{|K} \quad \text{et} \quad S = T_{|L}.$$

2.4 Relations scindables

Définition 11. Une relation T sera dite *scindable selon une bipartition (K, L) de J_T* si elle admet une factorisation de la forme $T = R \bowtie S$ avec $(R, S) \in \mathcal{R}_K \bowtie \mathcal{R}_L$.

En pratique, les critères suivants sont extrêmement utiles pour vérifier si une relation est ou non scindable selon une bipartition (K, L) .

Proposition 18. *Étant données T une relation dans \mathcal{E} et (K, L) une bipartition de J_T , T est scindable selon (K, L) si et seulement si*

$$T = T_{|K} \bowtie T_{|L}.$$

Preuve. Si l'égalité a lieu, T est scindable sur (K, L) par définition. Réciproquement, si T est non nulle et scindable selon (K, L) , l'égalité résulte immédiatement du corollaire 17, tandis que si T est nulle cette égalité est trivialement satisfaite.

□

Proposition 19. *Une relation multiple T est scindable selon une bipartition (K, L) de J_T si et seulement si on a*

$$\forall x \in T_{|K}, \forall y \in T_{|L}, x + y \in T.$$

Preuve. D'après les propositions 14 et 18, T est scindable selon (K, L) si et seulement si on a l'inclusion $T|_K \bowtie T|_L \subset T$, et la proposition 7 achève la preuve.

□

Définition 12. Une relation T est dite *scindable* s'il existe une bipartition (K, L) de J_T telle que T soit scindable selon (K, L) .

Remarque 7. Puisque l'existence d'une bipartition de J_T implique que J_T a au moins deux éléments, aucune relation de domaine vide ou singleton n'est scindable.

2.5 Parties scindables pour une relation R

Définition 13. Étant donnée $R \in \mathcal{R}$ une relation multiple sur \mathcal{E} , une partie J de J_R est dite *scindable pour R* si la relation $R|_J$ est scindable.

D'après la proposition 18, $J \subset J_R$ est scindable pour R s'il existe deux parties non vides complémentaires K et L dans J — ce qui suppose que J soit de cardinal ≥ 2 — telles que

$$R|_J = R|_K \bowtie R|_L. \quad (1)$$

2.6 Parties détachables d'une relation R

Dans cette section, une relation $R \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ est donnée et, pour tout $J \subset J_R$, on pose

$$\neg J = J_R \setminus J.$$

Définition 14. Une partie $J \subset J_R$ est dite *détachable de R* si l'on a

$$R = R|_{\neg J} \bowtie 1_J.$$

Dans le cas où J est une partie propre non vide de J_R , autrement dit lorsque $\emptyset \subsetneq J \subsetneq J_R$, le couple $(J, \neg J)$ est une bipartition de J_R , et la définition précédente revient à dire que R est scindable selon cette bipartition, avec en outre

$$R|_J = 1_J.$$

Bien entendu, cette dernière condition n'est pas suffisante pour faire de J une partie détachable de R .

Exemple 4. Pour $I = \{1, 2\}$, $J = \{1\}$ et f une application quelconque $E_1 \rightarrow E_2$ de graphe G , la relation $R = (I, G)$ vérifie nécessairement $R|_J = 1_J$. En outre, J est détachable de R si et seulement si f est constante.

Lemme 20. J est une partie de J_R détachable de R si et seulement si on a pour tout $x \in Z_{J_R}$

$$\rho_{(J_R, \neg J)}(x) \in \rho_{(J_R, \neg J)}(R) \Rightarrow x \in R.$$

Preuve. Par définition du produit $\rho_{(J_R, \neg J)}(R) \bowtie 1_J$, on a J détachable de R si et seulement si

$$G_R = \rho_{(J_R, \neg J)}^{-1}(\rho_{(J_R, \neg J)}(G_R)) \cap \rho_{(J_R, J)}^{-1}(Z_J) = \rho_{(J_R, \neg J)}^{-1}(\rho_{(J_R, \neg J)}(G_R)).$$

Puisque l'inclusion $G_R \subset \rho_{(J_R, \neg J)}^{-1}(\rho_{(J_R, \neg J)}(G_R))$ est toujours trivialement satisfaite, J est donc détachable de R si et seulement si on a l'inclusion réciproque

$$\rho_{(J_R, \neg J)}^{-1}(\rho_{(J_R, \neg J)}(G_R)) \subset G_R,$$

autrement dit si pour tout $x \in Z_{J_R}$ tel que $\rho_{(J_R, \neg J)}(x) \in \rho_{(J_R, \neg J)}(G_R)$, on a $x \in G_R$.

□

Proposition 21. *Si J est détachable de R , alors pour toute J_R -famille R -compatible y et pour toute J -famille x , on a*

$$\rho_{(J_R, \neg J)}(y) + x \in R.$$

Preuve. Posons $z = \rho_{(J_R, \neg J)}(y) + x$. On a $\rho_{(J_R, \neg J)}(z) = \rho_{(J_R, \neg J)}(y) \in \rho_{(J_R, \neg J)}(R)$, donc $z \in R$.

□

Proposition 22. *Si J et K sont deux parties de J_R détachables de la relation $R \in \mathcal{R}_E$, alors $J \cup K$ est également une partie détachable de R .*

Preuve. Posons $C = \neg(J \cup K) = \neg J \cap \neg K$. Soit $x \in Z_{J_R}$ quelconque tel que $\rho_{(J_R, C)}(x) \in \rho_{(J_R, C)}(R)$. D'après le lemme 20, il suffit de prouver que $x \in R$. Posons $x_C = \rho_{(J_R, C)}(x)$. Puisque par hypothèse $x_C \in \rho_{(J_R, C)}(R)$, il existe $y \in R$ tel que $x_C = \rho_{(J_R, C)}(y)$. Puisque J est détachable, on déduit de $\rho_{(J_R, \neg J)}(y) \in \rho_{(J_R, \neg J)}(R)$ que $z = \rho_{(J_R, \neg J)}(y) + \rho_{(J_R, J)}(x)$ est également R -compatible. Par conséquent $\rho_{(J_R, \neg K)}(z) \in \rho_{(J_R, \neg K)}(R)$, et K étant détachable on en déduit que $w = \rho_{(J_R, \neg K)}(z) + \rho_{(J_R, K)}(x)$ est lui aussi R -compatible. Or, par construction même, w et x coïncident sur K , sur $J \cap \neg K$ et sur C , de sorte que $w = x$, d'où $x \in R$.

□

Remarque 8. L'union d'une famille finie de parties de J_R détachables de R est donc encore détachable de R . Par contre, ceci n'est pas vrai en général pour une famille quelconque. Considérons par exemple le cas où $I = \mathbf{N}$, $E_i = \mathbf{N}$ pour tout $i \in I$, et $R = (I, G)$ avec G l'ensemble des suites $x \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ comportant une infinité de zéros : $x \in G \Leftrightarrow \text{Card}(\{n \in \mathbf{N}, x_n = 0\}) = \aleph_0$. Alors $\{n\}$ est détachable de R pour tout $n \in \mathbf{N}$, mais $I = \mathbf{N}$ lui-même n'est pas détachable de R puisque R n'est pas la relation triviale.

2.6.1 Partie externe et socle d'une relation

Définition 15. On appelle *partie externe* $Ex(R)$ d'une relation R l'union des parties de I qui sont détachables de R . On appelle *socle de R* l'ensemble $Soc(R) = J_R \setminus Ex(R)$.

Exemple 5. Toute relation triviale 1_J a un socle vide.

Définition 16. Une relation sera dite

- *mouvante* si sa partie externe est non détachable,
- *ancrée* si elle n'est pas mouvante,
- *fluide* si elle n'est pas triviale mais que son socle est vide,
- *solide* si sa partie externe est vide.

Une relation fluide est nécessairement mouvante, tandis qu'une relation solide est nécessairement ancrée. Une relation ancrée est déterminée par sa restriction à son socle, tandis qu'il ne suffit pas de connaître une relation mouvante sur son socle pour la connaître entièrement. Les relations finies, sans être nécessairement solides, sont toujours ancrées.

Exemple 6. L'exemple de la remarque 8 est celui d'une relation fluide.

3 Structure connective d'une relation $R \in \mathcal{R}$

Rappelons³ qu'un *espace connectif* (X, \mathcal{K}) est la donnée d'un ensemble de points X , appelé support de l'espace, et d'un ensemble \mathcal{K} de parties de X , appelé *structure connective* de l'espace, tel que

$$\forall \mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathcal{K}), \left(\bigcap_{K \in \mathcal{I}} K \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{K \in \mathcal{I}} K \in \mathcal{K} \right).$$

Notons que la propriété ci-dessus entraîne en particulier que $\emptyset \in \mathcal{K}$. L'espace connectif (X, \mathcal{K}) est dit *intègre* si les singletons $\{x\}$, où $x \in X$, appartiennent tous à \mathcal{K} . Pour tout ensemble de parties $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}X$, on note

$$[\mathcal{C}]$$

la structure connective engendrée par \mathcal{C} .

Pour démontrer le théorème 25, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 23. *Étant donné (X, \mathcal{K}) un espace connectif intègre, et $A \subset X$ une partie non connexe de X , il existe nécessairement une bipartition (L, M) de A telle que pour toute partie connexe $K \in \mathcal{K}$ incluse dans A on a*

$$\left| \begin{array}{ll} \text{ou bien} & K \subset L, \\ \text{ou bien} & K \subset M. \end{array} \right.$$

Preuve. A étant supposé non connexe est nécessairement non vide. Soit $x \in A$. Prenons pour L la composante connexe⁴ de x dans l'espace connectif induit par (X, \mathcal{K}) sur A , c'est-à-dire dans l'espace $(A, \mathcal{K} \cap \mathcal{P}A)$. Autrement dit, L est le plus grand connexe inclus dans A et contenant x . Puisque A est non connexe, on a nécessairement $\emptyset \subsetneq L \subsetneq A$, de sorte que (L, M) forme une bipartition de A , où $M = A \setminus L$. Soit maintenant K une partie connexe incluse dans A . On a soit $K \cap L = \emptyset$, et dans ce cas $K \subset M$, soit $K \cap L \neq \emptyset$ et dans ce cas $K \cup L$ est un connexe contenant x et contenu dans A , de sorte que $K \cup L \subset L$, autrement dit $K \subset L$.

□

3. Voir [2] et [3].

4. Voir [2].

3.1 Définition

Proposition 24. *Étant donnée R une relation dans \mathcal{E} , l'ensemble \mathcal{K}_R des parties de J_R non scindables pour R constitue une structure connective intègre sur J_R .*

Preuve. La partie vide et les singletons font nécessairement partie de \mathcal{K}_R , puisqu'une partie scindable pour R , admettant une bipartition, a nécessairement au moins deux éléments. Soit maintenant $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}_R$ un ensemble de parties non scindables pour R tel que

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Montrons par l'absurde que $U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ est également non scindable. Si U était scindable pour R , il admettrait une bipartition (L, M) telle que $R|_U$ soit scindable selon (L, M) , de sorte que l'on aurait d'après la proposition 18

$$R|_U = R|_L \bowtie R|_M.$$

Soit $x \in \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$. On a soit $x \in L$, soit $x \in M$. Supposons pour fixer les idées que $x \in L$. Puisque $M \neq \emptyset$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $M \cap C \neq \emptyset$. Mais on a aussi $L \cap C \neq \emptyset$, puisque $x \in L \cap C$. Donc $(L \cap C, M \cap C)$ est une bipartition de C . Mais d'après la proposition 13, on aurait

$$R|_C = R|_{L \cap C} \bowtie R|_{M \cap C},$$

de sorte que C serait scindable pour R , ce qui est absurde.

□

Définition 17. On appelle structure connective d'une relation multiple $R \in \mathcal{R}$ la structure connective \mathcal{K}_R définie dans la proposition précédente.

3.2 Exemple

On pourrait penser que, pour tout couple de relations multiples $(R, S) \in \mathcal{R}^2$, la structure connective de $R \bowtie S$ devrait être incluse dans la structure connective engendrée par les connexes de R et ceux de S . En général, cela est faux, de sorte que

$$\mathcal{K}_{R \bowtie S} \not\subset [\mathcal{K}_R \cup \mathcal{K}_S].$$

Donnons-en un contre exemple simple dans le cas où $I = \{1, 2, 3\}$ et, pour tout $i \in I$, $E_i = \{0, 1\}$. On définit la relation R de la façon suivante

$$(x_1, x_2, x_3) \in R \Leftrightarrow \exists i \in I, x_i = 0,$$

et la relation S par

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow \exists i \in I, x_i = 1.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_S = \mathcal{B}_3$, la structure borroméenne⁵ sur I , tandis que $\mathcal{K}_{R \bowtie S}$ est la structure connective grossière que I .

5. Voir [2].

3.3 Théorème de Brunn

En référence au résultat annoncé par Brunn⁶ [1] en 1892 à propos de la structure des entrelacs, j'appelle « théorème de Brunn » relatif à une classe d'objets à chacun desquels se trouve associée une structure connective l'énoncé affirmant que toute structure connective — ou du moins toute structure connective d'un certain type, par exemple toute structure connective intègre finie — est celle d'au moins un objet de cette classe.

Théorème 25. *Pour tout ensemble I , il existe un choix des ensembles E_i tel que pour toute structure connective intègre \mathcal{K} sur I il existe une relation $R \in \mathcal{R}$ telle que $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}$.*

Preuve. Considérons la construction suivante. On prend le même ensemble E_i pour tous les $i \in I$, à savoir $E_i = \{0, 1\}^{\mathcal{P}(I)}$, ensemble des applications de l'ensemble des parties de I dans $\{0, 1\}$. Soit maintenant \mathcal{K} une structure connective intègre sur I . Considérons la relation multiple R dans \mathcal{E} , de domaine I , définie de la façon suivante : une famille $(f_i : \mathcal{P}(I) \rightarrow \{0, 1\})_{i \in I}$ est R -compatible si et seulement si

$$\forall K \in \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}, \exists i \in K, f_i(K) = 1.$$

et vérifions que la structure connective de R est précisément \mathcal{K} .

Avant toute chose, commençons par remarquer que pour toute partie $A \subset I$, la restriction $R|_A$ de R à A a pour graphe l'ensemble des A -familles $(f_i)_{i \in A}$ telles que

$$\forall K \in \mathcal{K} \cap \mathcal{P}A \setminus \{\emptyset\}, \exists i \in K, f_i(K) = 1. \quad (2)$$

En effet, cette condition devant être satisfaite par toute I -famille R -compatible doit également, par restriction, être satisfaite par toute A -famille $R|_A$ -compatible. Réciproquement, si une A -famille vérifie la condition en question, il est aisé de la prolonger en une I -famille R -compatible, puisqu'il suffit pour tout $i \in I \setminus A$ et toute partie $B \subset I$ de poser $f_i(B) = 1$ pour obtenir un tel prolongement.

Si $K \in \mathcal{K}$, alors R ne peut pas être scindable sur K . Raisonnons par l'absurde : supposons que $R|_K$ soit scindable selon une bipartition (L, M) de K . Alors la famille

$l = (l_i : \mathcal{P}(I) \rightarrow \{0, 1\})_{i \in L}$ définie pour tout $i \in L$ et toute partie $A \subset I$ par

$$\begin{cases} l_i(A) = 1 & \text{si } A \neq K, \\ l_i(K) = 0 \end{cases}$$

est $R|_L$ -compatible, car en la prolongeant sur I par la famille \tilde{l} définie pour $i \in L$ par $\tilde{l}_i = l_i$ et pour $i \in I \setminus L$ par $\tilde{l}_i(A) = 1$ pour toute partie $A \subset I$ (y compris, donc, pour $A = K$), on obtient $\tilde{l} \in R$ puisque la propriété caractérisant la relation R est trivialement satisfaite. De même, la famille $m = (m_i : \mathcal{P}(I) \rightarrow \{0, 1\})_{i \in M}$ définie pour tout $i \in M$ et toute partie $A \subset I$ par

$$\begin{cases} m_i(A) = 1 & \text{si } A \neq K, \\ m_i(K) = 0 \end{cases}$$

6. Mais non entièrement démontré par lui, puisqu'il faudra attendre Kanenobu[4] en 1984 pour avoir une telle démonstration complète.

est $R|_M$ -compatible. Par conséquent, $l + m$ doit être $R|_K$ compatible, ce qui est absurde car il n'existe pas d'indice $i \in K$ tel que $(l + m)_i(K) = 1$.

Réciproquement, soit $K \subset I$ non scindable pour R . Montrons que $K \in \mathcal{K}$. Nous allons à nouveau raisonner par l'absurde. Supposons que $K \notin \mathcal{K}$. Dans cette hypothèse, d'après le lemme 23, il doit exister une bipartition (L, M) de K telle que toute partie connexe $C \in \mathcal{K}$ incluse dans K vérifie soit $C \subset L$, soit $C \subset M$. Soit alors $f \in R|_L$ et $g \in R|_M$. La somme $f + g$ est une K -famille qui est nécessairement $R|_K$ -compatible, puisque pour tout connexe $C \subset K$, on a soit $C \subset L$, d'où l'existence de $i \in C$ tel que $1 = f_i(C) = (f + g)_i(C)$, soit $C \subset M$, auquel cas il existe $i \in C$ tel que $1 = g_i(C) = (f + g)_i(C)$, de sorte que la relation (2) est satisfaite. Par conséquent, d'après la proposition 19, la relation R est scindable sur (L, M) , ce qui contredit l'hypothèse qui avait été faite.

Finalement, nous avons établi que la structure connective de la relation R ainsi définie est bien la structure donnée \mathcal{K} , ce qui prouve le théorème.

□

Références

- [1] Hermann Brunn. Ueber verkettung. *Sitzungsberichte der Bayerische Akad. Wiss., MathPhys. Klasse*, 22 :77–99, 1892.
- [2] Stéphane Dugowson. On connectivity spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LI(4) :282–315, 2010. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446998/fr>.
- [3] Stéphane Dugowson. *Dynamiques connectives (Une introduction aux notions connectives : espaces, représentations, feuilletages et dynamiques catégoriques)*. Éditions Universitaires Européennes, 2012.
- [4] Taizo Kanenobu. Satellite links with Brunnian properties. *Arch. Math.*, 44(4) :369–372, 1985.

Table des matières

1	Le monoïde commutatif $(\mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \bowtie, 1)$	2
1.1	Graphes triviaux et familles	2
1.2	Relations multiples	2
1.2.1	Relations nulles et relations triviales	3
1.3	Restrictions	3
1.3.1	Restrictions de familles	4
1.3.2	Restriction des relations	4
1.3.3	Composition des restrictions	4
1.3.4	Notation	5
1.4	Sommes de familles	5
1.4.1	Familles compatibles entre elles	5
1.4.2	Somme de deux familles compatibles	5
1.4.3	Somme de restrictions	6
1.4.4	Restriction de somme	6
1.4.5	Familles finies de familles	6
1.5	Produit de relations	7
1.5.1	Définition du monoïde commutatif $(\mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \bowtie, 1)$	7
1.5.2	Exemples	8
1.6	Relations incompatibles	9
1.7	Restriction d'un produit	9
1.8	Produit de restrictions	10
2	Scissions	10
2.1	Parties propres et bipartitions	10
2.2	Somme de deux familles de domaines disjoints	10
2.3	Unicité des factorisations disjointes	11
2.4	Relations scindables	11
2.5	Parties scindables pour une relation R	12
2.6	Parties détachables d'une relation R	12
2.6.1	Partie externe et socle d'une relation	13
3	Structure connective d'une relation $R \in \mathcal{R}$	14
3.1	Définition	15
3.2	Exemple	15
3.3	Théorème de Brunn	16